***Практичне заняття***

**Тема: Розв’язування тригонометричних рівнянь.**

**Мета:** Формування умінь розв'язувати тригонометричні рівняння способом

зведення до однієї триго­нометричної функції (алгебраїчний спосіб); способом розкладання на множники; розв'язувати однорідні тригонометричні рівняння; розв'язування дробово-раціональних рівнянь відносно тригонометричних функцій; розв'язування систем тригонометричних рівнянь.

**План практичного заняття:**

**1.Заміна змінних при розв’язуванні тригонометричних рівнянь.**

**2. Розв'язування тригонометричних рівнянь способом зведення до однієї**

**функції.**

**3.Розв’язування однорідних тригонометричних рівнянь.**

**4. Розв’язування тригонометричних рівнянь виду за допомогою**

**розкладання на множники.**

**5. Розв'язування дробово-раціональних рівнянь.**

**6. Розв’язування систем тригонометричних рівнянь.**

Розв’язування тригонометричних рівнянь зводиться до розв’язування найпростіших рівнянь за допомогою перетворень тригонометричних виразів, розкладання на множники та заміни змінних.

**1.Заміна змінних при розв’язуванні тригонометричних рівнянь.**

Слід пам’ятати загальний орієнтир, коли заміну змінних можна виконувати без перетворення заданих тригонометричних виразів.

* **Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді , то відповідний вираз зі змінною зручно позначити однією буквою (новою змінною).**

**Приклад 1.**

Розв’яжіть рівняння **.**

**Розв’язання:**

Аналізуючи вигляд цього рівняння, помічаємо, що до нього входить тільки одна тригонометрична функція - Отже, зручно ввести нову змінну Одержуємо нове рівняння:

Звідси маємо**: .**

Після того, як квадратне рівняння розв’язане, необхідно виконати обернену заміну і розв’язати одержані найпростіші тригонометоричні рівняння.

1. При маємо  – рівняння не має коренів, оскільки
2. При маємо рівняння:

**Відповідь:**

**Приклад 2.**

Розв’яжіть рівняння:

**Розв’язання:**

До заданого рівняння змінна входить тільки у вигляді Отже, зручно ввести нову змінну Тоді одержуємо Звідси , тобто або звідси

Виконуємо обернену заміну:

1. При маємо:

1. При маємо:
2. При маємо:

**Відповідь:**

Шукаючи план розв’язування більш складних тригонометричних рівнянь, можна скористатися таким *ОРІЄНТИРОМ*:

1. *Пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу.***
2. *Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести* ***до однієї функції.***
3. *Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції - ні, то пробуємо звести рівняння* ***до однорідного****.*
4. *В інших випадках переносимо* ***всі члени рівняння в один бік*** *і пробуємо* ***одержати добуток*** *або використовуємо* ***спеціальні прийоми розв’язування****.*

**2. Розв'язування тригонометричних рівнянь способом зведення до однієї**

**функції.**

**Приклад 3.**

Розв’яжіть рівняння:

1. Усі тригонометричні функції зводимо до одного аргументу - **,** використовуючи формулу косинуса подвійного аргументу:

Одержимо нове рівняння:

Тепер усі тригонометричні функції зводимо до однієї функції :

Одержали:

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді – , отже зручно виконати заміну

Заміна дає рівняння:

***; ;***

Виконаємо обернену заміну.

1. При маємо  **–** коренів не має, оскільки
2. При маємо Тоді :

Відповідь:

Зауваження: відповідь можна записати у вигляді:

**Приклад 4.**

Розв’яжіть рівняння:

**Розв’язування:**

Усі аргументи в рівнянні однакові **(** тому зводимо всі тригонометричні вирази до однієї функції - Ураховуємо, що **,**

звідси: **.**

Запишемо нове рівняння:

В одержане рівняння змінна входить в одному й тому самому вигляді отже, зручно виконати заміну: Маємо рівняння:

Приотримуємо рівносильне рівняння:

***;*** звідси

Виконаємо обернену заміну:

1. При маємо тоді :
2. При маємо тоді :

**Відповідь:**

**Приклад 5.**

Розв’яжіть рівняння**:**

**Розв’язання:**

Скористаємося формулами подвійного кута для синуса та косинуса, щоб звести рівняння до однієї тригонометричної функції.

**Згадаємо формули:**

Отже, після перетворень отримали рівняння:

Тепер зробимо заміну:**.**

Тоді останнє рівняння набуває вигляду**:**

Розв’язавши його, отримуємо:

**, .**

Виконаємо обернену заміну:

1. При маємо – рівняння не має коренів, оскільки

**.**

1. При маємо  **,** оскільки **.**

Тоді:

**+**

**Відповідь: +**

**3.Розв’язування однорідних тригонометричних рівнянь.**

**Означення:** Рівняння виду:

**=0,**

**де – дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, називають однорідними тригонометричними ріняннями го степеня відносно і**

З означення випливає, що суми показників степенів при  **і** усіх доданків однорідного тригонометричного рівняння є рівними.

Наприклад, рівняння  **–** однорідне тригонометричне рівняння першого степеня, а рівняння  **і**

***–*** однорідні тригонометричні рівняння другого степеня.

Для однорідних рівнянь існує ефективний метод розв’язування. Ознайомимося з ним на прикладах.

**Приклад 6.**

Розв’яжіть рівняння**:**

**Розв’язання:**

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий сумарний степінь 2.

Якщо **,** то з даного рівняння випливає, що Але  **і** не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність :

**.** Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел **,** при яких

Поділимо обидві частини даного рівняння на **,** отримаємо рівносильне рівняння:

Робимо заміну і розв’язуємо квадратне рівняння:

Звідси:

***, n***

***, n***

***Відповідь:, n***

**Приклад 6.**

Розв’яжіть рівняння**:**

**Розв’язання:**

Це рівняння не є однорідним. Проте його легко можна звести до однорідного. Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргументу **,** використовуючи формулу:**.**

**(1)**

У лівій частині одержаного рівняння (1) стоїть однорідний вираз другого степеня, а в правій частині – число 2. Якщо домножити число 2 на 1, а одиницю розписати за основною тригонометричною тотожністю **:** , то в лівій і правій частинах одержаного рівняння всі вирази будуть другого степеня, тобто одержимо однорідне рівняння (2).

Запишемо нове рівняння:

**(2)**

Отримали однорідне рівняння. Далі, діючи як у попередньому прикладі, перейдемо до квадратного рівняння відносно **:**

Завершіть розв’язування самостійно.

Відповідь: ***, n***

**4. Розв’язування тригонометричних рівнянь виду за допомогою**

**розкладання на множники.**

**Приклад 7.**

Розв’яжіть рівняння**:**

**Розв’язання:**

У цьому рівнянні достатньо важко всі тригонометричні функції звести до одного аргументу. У такому випадку слід скористатися четвертим пунктом орієнтира наведеного на початку лекції: перенести всі члени рівняння в один бік і спробувати одержати добуток, що дорівнює нулю. Для цього застосуємо формулу перетворення різниці синусів у добуток:

Одержуємо два рівняння: або

1. **;**

**Відповідь:**

**Приклад 8.**

Розв’яжіть рівняння**:**

**Розв’язання:**

Зразу скористаємося четвертим пунктом орієнтира: *переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.* Для цього застосуємо формулу перетворення суми синусів, яка стоїть у лівій частині рівняння, на добуток:

**(** і врахуємо, що

Для того щоб винести який-небудь вираз за дужки і одержати добуток, достатньо записати як синус подвійного аргументу **(**тоді за дужки можна винести .

або

З першого з цих рівнянь:

Друге перетворимо так: застосуємо формулу перетворення різниці косинусів у добуток

Одержали рівняння:

Звідси або

**1) ,**

**2)**

**Відповідь:**

1. **Розв'язування дробово-раціональних рівнянь.**

**Приклад 9.**

Розв'яжіть рівняння: **.**

**Розв’язання:**

Дріб дорівнює нулю, коли чисельник дорівнює нулю, а зна­менник відмінний від нуля:

 (1)

Розв'яжемо перше рівняння системи:

***2sin2 x – 3sin х = 0;***

***sin x(2sіn х – 3) = 0,***

звідси ***sin х = 0***  або ***2sin х – 3 = 0;***

1) ***sin x = 0; x = πn, пZ;***

2) ***2sin х = 3; sin x =*** ** — розв'язків немає.

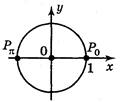
Друга умова ***1 + cos x ≠ 0*** виконується, якщо ***cos х ≠ -1***, тобто ***х ≠ π+π k, kZ.***

Отже, система (1) рівносильна системі:



На одиничне коло нанесемо числа ***х = πп, п**Z*** (рис.1) і виберемо ті, які задовольняють умову ***х ≠ π + 2πk, k**Z****.* Це числа ***х* = 2π*n*, *п*Z.**

*Відповідь:* **2π*n*, *п*  *Z.***



***Рис.1***

**6. Розв’язування систем тригонометричних рівнянь.**

Основні методи розв'язування систем тригонометричних рівнянь майже такі, як і методи розв'язування алгебраїчних систем.

***Приклад 10.*** Розв'язати систему рівнянь:



***Розв'язання***

Додавши і віднявши (1) і (2) рівняння, одержуємо

*  *

***Відповідь:*** *х* = (-1)  + π*п, п Z; у* = ±  + *2nk, k  Z.*

***Приклад 11.*** Розв'яжіть систему рівнянь:

.

***Розв'язання***

З першого рівняння знаходимо *у = π – х.* Тоді

cos *х – cos(π – х) =* 1, cos *х + cos х* = 1, 2 cos *х* = 1, cos *х =* *,*

*х = ± +2πп,* *n* ** *Z.*

Потім знаходимо:

*y=π – = ± + (*1 *– 2n)π, п  Z.*

***Відповідь****:* *х* = ± ** + 2π*п*, *у* = ± **+ (1 – 2*п*)π, де *п* ** Z.

***Приклад 12.*** Розв'яжіть систему рівнянь:



***Розв'язання***

***Відповідь:*** *х* = (*k* + *n*), *y* =  (*k* – *n*), де n, k ** Z.

**Домашнє завдання:**

Розв'яжіть рівняння:



Розв'яжіть систему рівнянь: